where $A'_k(t)$ is the polynomial corresponding to the multiple roots of the differential equation considered;

– development of the efficient methods for solving the secondary problem;

– improvement of the algorithms aimed at reducing the number of the measurements required;

– construction of the error correction algorithms providing the improvement in accuracy while reducing the information retrieval time.

Studying these points provides a sufficient solution for a wide range of practical problems.

Conclusions. In this paper a mathematical substantiation and computational formulae of an innovative finite-step computational method are presented. The algorithm developed is efficient for solving both main and secondary problems. When solving such problems for specific systems their respective features need to be taken into account, which essentially improves the accuracy of the results as well as the processing time. The results and computational formulae proposed can be used for solving similar problems of identification of various automatic control systems.

Bibliography

1. *Данилин В. П.* Гироскопические приборы. – Москва : Высшая школа, 1965. – 539 с.
2. *Каргу Л. И.* Гироскопические приборы и системы : учебник для вузов. – Ленинград : Судостроение, 1988. – 240 с.
3. *Павлов В. А.* Теория гироскопа и гироскопических приборов : учебное пособие. – Ленинград : Судостроение, 1964. – 495 с.
4. *Пельпор Д. С.* Гироскопические системы. Гироскопические приборы и системы. – Москва : Высшая школа, 1988. – 424 с.
5. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. – Москва : Наука, 1968. – 431 с.

References (transliterated)

1. Danilin V. P. *Giroskopicheskie pribory* [Gyroscopic instruments]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1965. 539 p.
2. Kargu L. I. *Giroskopicheskie pribory i sistemy : uchebnik dlya vuzov* [Gyroscopic instruments and systems: textbook for higher educational institutions]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1988. 240 p.
3. Pavlov V. A. *Teoriya giroskopa i giroskopicheskikh priborov : uchebnoe posobie* [Theory of gyroscope and gyroscopic instruments: educational aid]. Leningrad, Sudostroenie Publ., 1964. 495 p.
4. Pel'por D. S. *Giroskopicheskie sistemy. Giroskopicheskie pribory i sistemy* [Gyroscopic systems. Gyroscopic instruments and systems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1988. 424 p.
5. Kurosh A. G. *Kurs vysshey algebry* [Course in linear algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 431 p.

Received (надійшла) 09.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Токмакова Ірина Анатоліївна (Токмакова Ирина Анатольевна, Tokmakova Iryna Anatoliyivna) – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-60-87; e-mail: tokmakova.irina58@gmail.com.

УДК 519.6

Є. Л. ХУРДЕЙ

ТЕОРІЯ ПОБУДОВИ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ІЗ ЗАДАНИМИ ПРОЕКЦІЯМИ

Оператори апроксимації функції двох змінних, що інтерполюють її своїми проекціями по M непаралельних прямих, недостатньо досліджувалися в науковій літературі. У той же час ця теоретична проблема викликає практичний інтерес, коли дані проекцій (інтеграли вздовж ліній)виходять із компактного сканера томографії. У роботі побудований оператор інтерполяції, який точно відновлює поліноми степеня $M-1$. Метод досліджувався для випадку системи взаємно перпендикулярних прямих та для трьох непаралельних перетинних прямих (сторін трикутника). Знайдено інтегральне представлення залишкового члена наближення диференційовних функцій отриманими операторами. Запропонований метод дозволяє розширити теорію та практичне застосування комп’ютерної томографії.

Ключові слова: комп’ютерна томографія, оператори інтерполяції з відомими проекціями, залишок наближення, апроксимація, проекції вздовж ліній.

Е. Л. ХУРДЕЙ

ТЕОРИЯ ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ЗАДАНЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ

Операторы аппроксимации функции двух переменных, которые интерполируют ее своими проекциями по M непараллельных прямых, недостаточно исследовались в научной литературе. В то же время эта теоретическая проблема вызывает практический интерес, когда данные проекции (интегралы вдоль линий) выходят из компактного сканера томографии. В работе построен оператор интерполяции, который точно восстанавливает полином степени $M-1$. Метод исследовался для случая системы взаимно перпендикулярных прямых и для трех непараллельных пересекающихся прямых (сторон треугольника). Найдено интегральное представление остаточного члена приближения дифференцируемых функций полученными операторами. Предложенный метод позволяет расширить теорию и практическое применение компьютерной томографии.

Ключевые слова: компьютерная томография, операторы интерполяции с известными проекциями, остаток приближения, аппроксимация, проекции вдоль линий.

Y. L. KHURDEI

THEORY OF CONSTRUCTION OF OPERATORS OF INTERPOLATION WITH PREDETERMINED PROJECTIONS

Operators of approximation of the functions of two variable, interpolating the functions by their projections along M nonparallel lines, were not sufficiently considered in the scientific literature. At the same time, this theoretical problem bas a strong practical interest when the given projections (integrals along lines) come from a compated tomography scanner. The paper constructs the interpolation operator which exactly restores the polynomials of degree $M-1$. The method was investigated for a system of mutually perpendicular lines and for three nonparallel intersecting lines (side of a triangle). An integral representation of the residual member of the approximation by the obtained operators for differentiable functions is found. The proposed method allows in expand theory and practical applications of computed tomography.

Key words computer tomography, operators of interpolation with known projections, remainder of the approximation, operators of interpolation, projections among lines.

Вступ. Пропонується і досліджується *теорія побудови операторів наближення функцій двох змінних*, які інтерполюють функцію в точках перетину M ($M \geq 3$) непаралельних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці і мають задані значення проекцій (інтегралів вздовж вказаних M прямих). Вважаються відомими лише вказані проекції, які можуть надходити з комп'ютерного томографа. Невідомі інтерполяційні дані знаходяться з умови: побудований оператор повинен точно відновлювати всі поліноми степеня $M-1$ $(M=3)$ або знаходяться з умови мінімуму побудованого оператора в нормі L_2 *методом найменших квадратів*. Метод досліджувався для випадку системи взаємно перпендикулярних прямих та для трьох непаралельних перетинних прямих (сторін трикутника). Знайдено інтегральне представлення залишкового члена наближення диференційовних функцій отриманими операторами. Метод допускає узагальнення на випадок M груп перетинних прямих, в кожній групі всі прямі паралельні.

Аналіз останніх досліджень. У відомих авторам публікаціях, присвячених методам розв'язання задачі комп'ютерної томографії, [1 – 3] досліджуються методи, основані на використанні *прямого та оберненого перетворення Радона*, *прямого метода Фур'є* тощо.

В працях [4] та [5] запропоновано конструктивний підхід до побудови операторів наближення функцій двох змінних за допомогою відомих їх проекцій вздовж заданої системи прямих. В цих роботах сформульовано загальний підхід до побудови операторів інтерполяції функції двох змінних в системі точок перетину M прямих, які мають задані значення проекцій і задані значення наближуваної функції в точках перетину цих прямих.

В роботі [5] цей метод був досліджений для випадку, коли система прямих є взаємно перпендикулярною. В роботах [6] та [7] досліджено випадок трьох непаралельних перетинних прямих та випадок системи M перетинних прямих ніякі три з яких не перетинаються в одній точці.

В роботі [8] вперше запропоновано і досліджено метод наближення функцій двох змінних за допомогою операторів, що використовують лише проекції вздовж трьох сторін трикутника.

Постановка задачі. В даній роботі досліджується метод побудови операторів інтерполяції із заданими проекціями вздовж вказаних M непаралельних прямих, ніякі три з яких не перетинається в одній точці. Вперше пропонується загальний підхід до вибору невідомих інтерполяційних значень наближуваної функції в точках інтерполяції, які є точками перетину вказаних прямих. Критерій полягає в наступному: оператор наближення, побудований за допомогою інтерполяційних даних в точках перетину вказаної системи прямих та проекцій вздовж цих прямих, повинен точно відновлювати довільні поліноми $M-1$ $(M=3)$ степеня від двох змінних.

Теорія побудови операторів інтерполяції функції $f(x,y)$ в точках перетину M непаралельних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці і мають задані проекції вздовж вказаної системи прямих.

Нехай задано область $D \subset R^2$, $diamD < \infty$, $\Gamma_k^* = D \cap \Gamma_k \neq \varnothing$, $k = \overline{1,M}$. Нехай функція $f(x,y)$ має такі властивості: $f(x,y) \in C(D)$, $D = \text{supp}(f)$. Розглянемо M непаралельних прямих, які описуються рівняннями $\Gamma_k : \omega_k(x,y) \equiv \alpha_k \cdot x + \beta_k \cdot y - \varphi_k = 0$, $k = \overline{1,M}$, $\alpha_k^2 + \beta_k^2 = 1$.

Будуємо оператор $L1_M\, f(x,y)$, який інтерполює $f(x,y)$ в точках $(X_{pq}, Y_{pq}) \in \Gamma^*{}_p \cap \Gamma^*{}_q$, $p,q = \overline{1,M}$, $p \neq q$ у вигляді:

$$L1_M\, f(x,y) = \sum_{k=1}^{M} \sum_{\substack{l=1 \\ l<k}}^{M} f(X_{kl}, Y_{kl}) h_{kl}(x,y), \qquad (1)$$

де $h_{kl}(x,y) = \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k \\ j\neq l}}^{M} \dfrac{\omega_j(x,y)}{\omega_j(X_{kl}, Y_{kl})}$.

Лема 1. *Оператор $L1_M\, f(x,y)$ інтерполює кожну неперервну функцію $f(x,y)$ у точках (X_{pq}, Y_{pq}),*

$p,q=\overline{1,M}$, $p \neq q$:

$$L1_M\ f(X_{pq},Y_{pq}) = f(X_{pq},Y_{pq})\ ,\ p,q=\overline{1,M}\ ,\ p \neq q\ .$$

Доведення.

Дійсно, підставивши у формулу (1) $x = X_{pq}$, $y = Y_{pq}$, отримаємо

$$L1_M\ f(X_{pq},Y_{pq}) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k\\ l<k}}^{M} f(X_{kl},Y_{kl})h_{kl}(X_{pq},Y_{pq}).$$

Врахуємо, що $h_{kl}(X_{pq},Y_{pq}) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k,l}}^{M} \frac{\omega_j(X_{pq},Y_{pq})}{\omega_j(X_{kl},Y_{kl})}$, та якщо $j = p$ або $j = q$, то $\omega_j(X_{pq},Y_{pq}) = 0$. Тобто, лише при $k = p$, $l = q$ $h_{kl}(X_{pq},Y_{pq}) = 1$.

Тому, $L1_M\ f(X_{pq},Y_{pq}) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k\\ l<k}}^{M} f(X_{kl},Y_{kl})\Delta_{k,p}\Delta_{l,q} = f(X_{pq},Y_{pq})$, де $\Delta_{i,j}$ *– символ Кронекера.*

Отже, $L1_M\ f(X_{pq},Y_{pq}) = f(X_{pq},Y_{pq})$, $p,q=\overline{1,M}$, $p \neq q$.

Лема 1 доведена.

Побудуємо оператор $L2_M\ f(x,y)$ у вигляді:

$$L2_M\ f(x,y) = \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j^*} f(x,y)ds_j \frac{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{M} \omega_k(x,y)}{\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{M} \omega_k(x,y)ds_j}\ . \tag{2}$$

Лема 2. *Оператор* $L2_M\ f(x,y)$ *має такі властивості*:

$$L2_M\ f(X_{pq},Y_{pq}) = 0,\ \ p,q=\overline{1,M},\ \ p \neq q.$$

Доведення.

Підставимо у формулу (2) $x = X_{pq}$, $y = Y_{pq}$.

Врахуємо, що $L2_M\ f(X_{pq},Y_{pq}) = \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j^*} f(x,y)ds_j \frac{\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{M} \omega_k(X_{pq},Y_{pq})}{\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{M} \omega_k(x,y)ds_j}$, бо у випадках $k = p$ або $k = q$, маємо $\omega_k(X_{pq},Y_{pq}) = 0$. Тобто $\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{M} \omega_k(X_{pq},Y_{pq}) = 0$, $j = 1, ..., M$.

Отже, $L2_M\ f(X_{pq},Y_{pq}) = 0$, $p,q=\overline{1,M}$, $p \neq q$.

Лема 2 доведена.

Побудова операторів інтерполяції функції двох змінних на системі точок перетину M непаралельних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці і мають задані проекції вздовж вказаної системи прямих.

Введемо позначення:

$$L_M\ f(x,y) = L1_M\ f(x,y) + L2_M\left(f(x,y) - L1_M\ f(x,y)\right)\ . \tag{3}$$

Теорема 1. *Оператор* $L_M\ f(x,y)$ *має такі властивості:*

1. $L_M\ f(X_{pq},Y_{pq}) = f(X_{pq},Y_{pq}),\ \ p,q=\overline{1,M},\ \ p \neq q$;

2. $\int_{\Gamma_j^*} L_M\ f(x,y)ds_j = \int_{\Gamma_j^*} f(x,y)ds_j,\ \ j=\overline{1,M}$.

Доведення.

1. З леми 1 витікає, що $L1_M\, f(X_{pq},Y_{pq}) = f(X_{pq},Y_{pq})$. Тому,

$$L_M\, f(X_{pq},Y_{pq}) = L1_M\, f(X_{pq},Y_{pq}) + L2_M\, f(X_{pq},Y_{pq}) - L2_M\, L1_M\, f(X_{pq},Y_{pq}) = f(X_{pq},Y_{pq}) + L2_M\, f(X_{pq},Y_{pq}) -$$
$$-L2_M\, f(X_{pq},Y_{pq}) = f(X_{pq},Y_{pq}),\ p,q=\overline{1,M},\ p\neq q.$$

Таким чином, перше твердження теореми 1 доведене.

2. Для доведення твердження 2 теореми, звертаємо увагу на те, що при інтегруванні функції $L2_M(f(x,y)-L1_M\, f(x,y))$ по прямій Γ_j^* всі доданки, крім доданка при $k=j$ будуть дорівнювати 0. Тому

$$\int_{\Gamma_j^*} L_M\, f(x,y)ds_j = \int_{\Gamma_j^*}\left(L1_M\, f(x,y) + L2_M\,(f(x,y)-L1_M\, f(x,y))\right)ds_j =$$

$$= \int_{\Gamma_j^*} L1_M\, f(x,y)ds_j + \int_{\Gamma_j^*}\sum_{k=1}^{M}\int_{\Gamma_k^*}(f(x,y)-L1_M\, f(x,y))ds_k\, \frac{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M}\omega_k(x,y)}{\int\limits_{\Gamma_k^*}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M}\omega_k(x,y)ds_k}ds_j =$$

$$= \int_{\Gamma_j^*} L1_M\, f(x,y)ds_j + \sum_{k=1}^{M}\int_{\Gamma_k^*}(f(x,y)-L1_M\, f(x,y))ds_k\, \frac{\int\limits_{\Gamma_j^*}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M}\omega_i(x,y)ds_j}{\int\limits_{\Gamma_k^*}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M}\omega_i(x,y)ds_k} =$$

$$= \int_{\Gamma_j^*} L1_M\, f(x,y)ds_j + \sum_{k=1}^{M}\int_{\Gamma_k^*}(f(x,y)-L1_M\, f(x,y))ds_k\, \frac{\Delta_{k,j}\int\limits_{\Gamma_j^*}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M}\omega_i(x,y)ds_j}{\int\limits_{\Gamma_k^*}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M}\omega_i(x,y)ds_k} =$$

$$= \int_{\Gamma_j^*} L1_M\, f(x,y)ds_j + \int_{\Gamma_j^*}(f(x,y)-L1_M\, f(x,y))ds_j\, \frac{\int\limits_{\Gamma_j^*}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M}\omega_i(x,y)ds_j}{\int\limits_{\Gamma_j^*}\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M}\omega_i(x,y)ds_j} =$$

$$= \int_{\Gamma_j^*} L1_M\, f(x,y)ds_j + \int_{\Gamma_j^*} f(x,y)ds_k - \int_{\Gamma_j^*} L1_M\, f(x,y))ds_j = \int_{\Gamma_j^*} f(x,y)ds_j,\ j=\overline{1,M}\,.$$

Теорема 1 доведена.

Лема 3. *Будь-який поліном* $(M-1)$ *– го степеня з властивостями* $P_{M-1}(X_{pq},Y_{pq})=0$ *може бути однозначно представлений у вигляді* $L2_M\, P_{M-1}(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{M}a_k\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{M}\omega_i(x,y)$, *де* a_k *– коефіцієнти полінома* $P_{M-1}(x,y)$.

Доведення.

Оскільки всі прямі перетинаються одна з одною і в одній точці не перетинається більше ніж дві прямі, то очевидно, що $L2_M\, P_{M-1}(X_{pq},Y_{pq})=0,\ \ p\neq q$, оскільки в кожному добутку $\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{M}\omega_j(x,y)$ знайдеться такий множник $\omega_p(x,y)$ або $\omega_q(x,y)$, який дорівнює 0 в точці (X_{pq},Y_{pq}).

Для доведення того, що існують a_k, $k=\overline{1,M}$ не рівні 0 одночасно, знайдемо їх із системи

$$\int_{\Gamma_j^*} L2_M\, f(x,y)ds_j = \int_{\Gamma_j^*} f(x,y)ds_j = \gamma_j,\quad j=1,\ldots,M\ ;$$

Нехай $f(x,y)=P_{M-1}(x,y)$ и з умови теореми $L2_M\,P_{M-1}(x,y)=\sum_{k=1}^{M}a_k\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{M}\omega_i(x,y)$, тоді

$$\int_{\Gamma_j^*}L2_M\,P_{M-1}(x,y)ds_j=\sum_{k=1}^{M}a_k\int_{\Gamma_j^*}\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{M}\omega_i(x,y)ds_j=a_j\int_{\Gamma_j^*}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{M}\omega_i(x,y)ds_j=\gamma_j,$$

оскільки для кожного $k\neq j$ в добуток буде входити множник $\omega_i(x,y)\neq 0$ на лінії Γ_j.

Доводимо, що $a_j=\dfrac{\gamma_j}{\int_{\Gamma_j^*}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{M}\omega_i(x,y)ds_j}$, $j=\overline{1,M}$. Ця рівність є очевидною, якщо $\int_{\Gamma_j^*}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{M}\omega_i(x,y)ds_j\neq 0$. Вважаємо, що $f(x,y)$ є фінітною такою, що $\operatorname{supp}f(x,y)=D$ і кожна пряма Γ_k перетинає цю область так, що координати точок $(X_{k_{\min}},Y_{k_{\min}})$, $(X_{k_{\max}},Y_{k_{\max}})$ задовольняють умові $\int_{\Gamma_j^*}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{M}\omega_i(x,y)ds_j\neq 0$.

Зауваження. Для випадку $M=3$ доведення того, що $\int_{\Gamma_j^*}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{M}\omega_i(x,y)ds_j\neq 0$ очевидне, якщо інтегрувати вздовж сторін трикутника.

Лема 3 доведена.

Теорема 2. *Кожний поліном степеня $(M-1)$ може бути однозначно представлений за допомогою M проекцій вздовж M прямих Γ_j, $j=\overline{1,M}$ і за допомогою C_{M-1}^2 інтерполяційних даних в точках перетину цих прямих.*

Доведення.

Поліном степеня M від двох змінних має $C_{M+2}^2=\dfrac{(M+2)(M+1)}{2}$ коефіцієнтів. Поліном степеня $M-1$ має $C_{M-1+2}^2=C_{M+1}^2=\dfrac{(M+1)M}{2}$ коефіцієнтів. Інтерполяційний оператор $L1_M\,f(x,y)$ має

$$C_{M-2+2}^2=C_M^2=\frac{M(M-1)}{2}\ \text{коефіцієнтів.}$$

Тоді формула для полінома $L_M\,f(x,y)=L1_M\,f(x,y)+L2_M\,(f(x,y)-L1_M\,f(x,y))$ буде поліномом степеня $M-1$.

Поліном $L1_M\,f(x,y)$ є поліномом $(M-2)$-го степеня з властивостями $L1_M\,f(x,y)\equiv f(x,y)$, $\forall f(x,y)\in P_{M-2}$, де $P_{M-2}=\left\{\sum_{0\le i+j\le M-2}a_{ij}x^iy^j,\ a_{ij}\in\mathbb{R}\right\}$ – множина поліномів від двох змінних степеня $(M-2)$.

Побудуємо оператор $L1_M\,P_{M-2}(x,y)=\sum_{r=1}^{M-1}\sum_{s=r+1}^{M}P_{M-2}(X_{rs},Y_{rs})h_{rs}(x,y)$, де $h_{rs}(x,y)=\prod_{\substack{j=1\\j\neq r,s}}^{M}\dfrac{\omega_j(x,y)}{\omega_j(X_{rs},Y_{rs})}$. Ці функції є поліномами степеня $(M-2)$, оскільки кожна функція $h_{rs}(x,y)$ є *базисним поліномом Лагранжевої інтерполяції* в $C_M^2=\dfrac{M(M-1)}{2}$ точках перетину M прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці. Оскільки, $C_M^2+M=\dfrac{M(M-1)}{2}+M=M\left(\dfrac{M-1+2M}{2}\right)=\dfrac{M(M+1)}{2}$, то система функцій $h_{rs}(x,y)$ $r,s=\overline{1,M}$, $r\neq s$ і

$\dfrac{\prod_{\substack{r=1\\r\neq s}}^{M}\omega_r(x,y)}{\int_{\Gamma_s^*}\prod_{\substack{r=1\\r\neq s}}^{M}\omega_r(x,y)ds_s}$ створюють повну лінійно незалежну систему поліномів степеня $\le M-1$.

Розглянемо функцію $L_M^* f(x,y) = L2_M(f(x,y) - L1_M f(x,y))$, яка має властивості:

1. Ця функція є поліномом степеня $M-1$;
2. $L2_M^* P_{M-2}(X_{rs}, Y_{rs}) = 0$, $r,s = \overline{1,M}$, $r \neq s$.

Згідно з припущенням леми 3, поліном $L2_M^* f(x,y)$ однозначно може бути знайдений за допомогою M проекцій від нього вздовж вказаної системи прямих. Він може бути представлений у вигляді:

$$L2_M^* f(x,y) = \sum_{j=1}^{M} \int_{\Gamma_j^*} (f(x,y) - L1_M f(x,y)) ds_j \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{M} \omega_k(x,y)}{\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{M} \omega_k(x,y) ds_j},$$

оскільки за припущенням $\int_{\Gamma_j^*} \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{M} \omega_k(x,y) ds_j \neq 0$.

Звідси отримаємо: $L_M f(x,y) = L1_M f(x,y) + L2_M(f(x,y) - L1_M f(x,y))$ задовольняє всі необхідні властивості теореми.

Теорема 2 доведена.

Інтегральне представлення залишку наближення.

Теорема 3. *Якщо* $f(x,y)$ *належить до класу* $\mathbb{C}^M(D)$, $D = \operatorname{supp} f(x,y)$, *то похибка наближення* $Rf(x,y) = f(x,y) - L_M f(x,y)$ *може бути представлена в інтегральній формі*

$$Rf(x,y) = r_{M-1} f(x,y) - L_M(r_{M-1} f(x,y)),$$

де $r_{M-1} f(x,y)$ *– похибка наближення* $f(x,y)$ *в інтегральній формі.*

Доведення. Кожну M разів диференційовану функцію можна представити у вигляді *формули Тейлора*

$$f(x,y) = T_{M-1} f(x,y) + \int_0^1 \frac{\partial^M}{\partial t^M} f(X_{pq} + t(x - X_{pq}), Y_{pq} + t(y - Y_{pq})) \cdot \frac{(1-t)^{M-1}}{(M-1)!} dt,$$

де $T_{M-1} f(x,y) = \sum_{0 \le r+s \le M-1} f^{(r,s)}(X_{pq}, Y_{pq}) \frac{(x - X_{pq})^r (y - Y_{pq})^s}{r!s!}$ – *поліном Тейлора степеня* $(M-1)$ розкладу функції $f(x,y)$ в околі точки (X_{pq}, Y_{pq}).Враховуємо, що $T_{M-1} f(x,y)$ є поліномом Тейлора функції $f(x,y)$ степеня $(M-1)$, а оператори $L_M f(x,y)$ точно відновлюють всі поліноми степеня $(M-1)$. Згідно з лемою можемо написати наступну низку рівностей:

$$= T_{M-1} f(x,y) + r_{M-1} f(x,y) - [L_M T_{M-1} f(x,y) + L_M r_{M-1} f(x,y)] =$$
$$= T_{M-1} f(x,y) + r_{M-1} f(x,y) - L_M T_{M-1} f(x,y) - L_M r_{M-1} f(x,y) =$$
$$= T_{M-1} f(x,y) + r_{M-1} f(x,y) - T_{M-1} f(x,y) - L_M r_{M-1} f(x,y) =$$
$$= r_{M-1} f(x,y) - L_M r_{M-1} f(x,y).$$

Теорема 3 доведена.

Приклад.

Розглянемо трикутник з вершинами $A_1(R,0)$, $A_2\left(-\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}R}{2}\right)$, $A_3\left(-\frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)$ і рівняннями сторін (рис. 1):

$$\Gamma_{12} : \omega_{12}(x,y) = (x - X_1)(Y_2 - Y_1) - (y - Y_1)(X_2 - X_1) = 0;$$
$$\Gamma_{23} : \omega_{23}(x,y) = (x - X_2)(Y_3 - Y_2) - (y - Y_2)(X_3 - X_2) = 0;$$
$$\Gamma_{13} : \omega_{13}(x,y) = (x - X_1)(Y_3 - Y_1) - (y - Y_1)(X_3 - X_1) = 0.$$

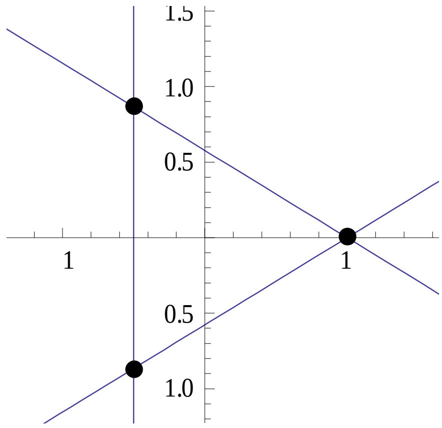

Рис. 1 – Задана система прямих на трикутнику.

Введемо позначення: $L1_3 f(x,y) = L1 f(x,y)$, та $L2_3 f(x,y) = L2 f(x,y)$.

Будуємо оператор $L1f(x,y)$, який інтерполює $f(x,y)$ у вершинах трикутника $(X_k, Y_k), k=\overline{1,3}$ у вигляді:

$$L1f(x,y) = f(X_1,Y_1)\cdot\frac{\omega_{23}(x,y)}{\omega_{23}(X_1,Y_1)} + f(X_2,Y_2)\cdot\frac{\omega_{13}(x,y)}{\omega_{13}(X_2,Y_2)} + f(X_3,Y_3)\cdot\frac{\omega_{12}(x,y)}{\omega_{12}(X_3,Y_3)};$$

$$L2f(x,y) = \frac{\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)}{\int\limits_{\Gamma_{12}}\omega_{23}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{12}}\cdot\int\limits_{\Gamma_{12}} f(x,y)ds_{12} + \frac{\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)}{\int\limits_{\Gamma_{23}}\omega_{12}(x,y)\omega_{31}(x,y)ds_{23}}\cdot\int\limits_{\Gamma_{23}} f(x,y)ds_{23} +$$

$$+\frac{\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)}{\int\limits_{\Gamma_{31}}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{31}}\cdot\int\limits_{\Gamma_{31}} f(x,y)ds_{31}.$$

Введемо позначення:

$$Lf(x,y) = L1f(x,y) + L2(f(x,y) - L1f(x,y)).$$

Перевіримо властивості оператора $Lf(x,y)$:

1. $Lf(X_i,Y_i) = f(X_i,Y_i),\ i=\overline{1,3}$;
2. $\int\limits_{\Gamma_{ij}} Lf(x,y)ds_{ij} = \int\limits_{\Gamma_{ij}} f(x,y)ds_{ij}$.

1. Підставимо у формулу $Lf(x,y)$ точку $(X_i,Y_i), i=\overline{1,3}$. Отримаємо

$$Lf(X_i,Y_i) = L1f(X_i,Y_i) + L2(f(X_i,Y_i) - L1f(X_i,Y_i)) = L1f(X_i,Y_i) + L2f(X_i,Y_i) - L2L1f(X_i,Y_i) =$$
$$= f(X_i,Y_i) + L2f(X_i,Y_i) - L2f(X_i,Y_i) = f(X_i,Y_i),\ i=\overline{1,3}.$$

Таким чином, перша властивість доведена.

2. Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_{\Gamma_{ij}} Lf(x,y)ds_{ij} = \int\limits_{\Gamma_{ij}}\left(L1f(x,y) + L2(f(x,y) - L1f(x,y))\right)ds_{ij} = \int\limits_{\Gamma_{ij}} L1f(x,y)ds_{ij} + \int\limits_{\Gamma_{ij}} L2(f(x,y) - L1f(x,y))ds_{ij} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_{ij}} L1f(x,y)ds_{ij} + \int\limits_{\Gamma_{ij}} L2f(x,y)ds_{ij} - \int\limits_{\Gamma_{ij}} L2L1f(x,y)ds_{ij} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_{ij}} L1f(x,y)ds_{ij} + \int\limits_{\Gamma_{ij}} L2f(x,y)ds_{ij} - \int\limits_{\Gamma_{ij}} L1f(x,y)ds_{ij} = \int\limits_{\Gamma_{ij}} L2f(x,y)ds_{ij} = \int\limits_{\Gamma_{ij}} f(x,y)ds_{ij},$$

$$(i,j) = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}.$$

Перевіримо, що $Lf(x,y) \equiv f(x,y)$ для всіх $f(x,y) \in P_2$.

Побудуємо оператор $L1f(x,y)$ у вигляді:

$$L1P_2(x,y) = P_2(X_1,Y_1)\frac{\omega_{23}(x,y)}{\omega_{23}(X_1,Y_1)} + P_2(X_2,Y_2)\frac{\omega_{31}(x,y)}{\omega_{31}(X_2,Y_2)} + P_2(X_3,Y_3)\frac{\omega_{12}(x,y)}{\omega_{12}(X_3,Y_3)}.$$

Цей поліном має властивості:

$L1P_2(X_k,Y_k) = P_2(X_k,Y_k), k=\overline{1,3}$

Поліном $P_2^*(x,y)=P_2(x,y)-L1P_2(x,y)$ є поліномом другого степеня з властивостями $P_2^*(X_k,Y_k)=0$, $k=\overline{1,3}$. Згідно з лемою 3, кожний такий поліном 2-го степеня може бути однозначно виражений формулою:

$$P_2(x,y)=\frac{\omega_{13}(x,y)\omega_{12}(x,y)}{\int\limits_{\Gamma_{23}}\omega_{13}(x,y)\omega_{12}(x,y)ds_{23}}\cdot\gamma_{23}+\frac{\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)}{\int\limits_{\Gamma_{13}}\omega_{12}(x,y)\omega_{23}(x,y)ds_{13}}\cdot\gamma_{13}+\frac{\omega_{23}(x,y)\omega_{13}(x,y)}{\int\limits_{\Gamma_{12}}\omega_{23}(x,y)\omega_{13}(x,y)ds_{12}}\cdot\gamma_{12}\,.$$

Таким чином, оператор інтерполяції функції $f(x,y)$ в вершинах трикутника (X_k,Y_k), $k=\overline{1,3}$ із заданими проекціями вздовж кожної сторони трикутника може бути представлений у вигляді:

$$L1f(x,y)=f(X_1,Y_1)\frac{\omega_{23}(x,y)}{\omega_{23}(X_1,Y_1)}+f(X_2,Y_2)\frac{\omega_{13}(x,y)}{\omega_{13}(X_2,Y_2)}+f(X_3,Y_3)\frac{\omega_{12}(x,y)}{\omega_{12}(X_3,Y_3)};$$

$$Lf(x,y)=L1f(x,y)+L2(f(x,y)-L1(x,y)).$$

Отже, $Lf(x,y)\equiv f(x,y)$ для всіх $f(x,y)\in P_2$.

Висновки. В даній статті для випадку наближення функції 2-х змінних за допомогою відомих проекцій – інтегралів вздовж заданої системи M прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці і серед яких немає паралельних та інтерполяційних даних в точках перетину вказаної системи прямих, запропоновано в методі побудови інтерполяційних операторів невідомі інтерполяційні дані знаходити з умов, щоб оператор наближення точно відновлював всі поліноми степеня $(M-1)$. Всі результати сформульовані і доведені у вигляді лем та теорем. Доведена теорема про те, що кожний довільний поліном степеня $(M-1)$ від двох змінних однозначно може бути представлений за допомогою лише M проекцій вздовж заданої системи прямих, якщо в ньому всі інші невідомі коефіцієнти у кількості (C_{M+2}^2-M) вибираються з умови, щоб отриманий оператор $L_M f(x,y)$ точно відновлював всі поліноми степеня $(M-1)$. Знайдено інтегральне представлення залишку наближення M раз неперервно диференційовної функції 2-х змінних побудованими операторами.

Список літератури

1. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографи : Пер. с англ. – Москва : Мир, 1990. – 279 с.
2. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. – Москва : Мир, 1983. – 352 с.
3. *Терновой К. С., Синьков М. В., Закидальский А. И.* Введение в современную томографию. – Київ : Наукова думка, 1983. – 231 с.
4. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.
5. *Литвин О. О., Хурдей Є. Л.* Методи побудови операторів із заданими проекціями вздовж перетинних прямих, які інтерполюють $f(x,y)$ в точках перетину цих прямих // Проблемы машиностроения, № 3. – Харків. – 2013. – С. 60 – 67.
6. *Литвин О. О., Хурдей Є. Л.* Поліноміальна інтерполяція з відомими проекціями на довільній системі N груп прямих, які складаються з M паралельних прямих // Проблемы машиностроения, № 3. – Харків. – 2014. – С. 33 – 37.
7. *Литвин О. М., Литвин О. О., Хурдей Є. Л.* Про вибір невідомих значень наближуваної функції в операторі інтерполяції із заданими проекціями // Бионика интеллекта, №2. – Харків. – 2017. – С. 66 – 71.

References (transliterated)

1. Natterer F. *Matematicheskie aspekty komp'uternoy tomografii* [Mathematical Aspects of Computer Tomography, Trans. from Eng.]. Moscow, Mir Publ., 1990. p. 279.
2. Khermen H. *Vosstanovlenie izobrazheniy po proektsiyam* [Recover Images from Projections, Basics Reconstruction Tomography]. Moscow, Mir Publ., 1983. p. 352.
3. Ternovoy K. S., Sin'kov M. V., Zakidal'skiy A. I. *Vvedenie v sovremennuyu tomografiyu* [Introduction to Modern Tomography]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1983. p. 231.
4. Lytvyn O. M. *Interlinatsiya funktsiy ta deyaki yiyi zastosuvannya* [Interlineation Functions and Some of their Applications]. – Kharkiv, Osnova Publ., 2002. p. 544.
5. Lytvyn O. O., Khurdey E. L. Metody pobudovy operatoriv iz zadanymy proektsiyamy vzdovzh peretynnykh pryamykh, yaki interpolyuyut' $f(x,y)$ v tochkakh peretynu tsykh pryamykh [Method for constructing operators with the given projections along intersecting straight lines interpolating $f(x,y)$ at the lines' intersection points]. *Problemy mashinostroeniya* [Journal of Mechanical Engineering]. Kharkiv, 2013, no. 3, pp. 60–67.
6. Lytvyn O. O., Khurdey E. L. Polinomial'na interpolyatsiya z vidomymy proektsiyamy na dovil'niy systemi N grup pryamykh, yaki skladayut'sya z M paralel'nykh pryamykh [Polynomial interpolation with known projections on an arbitrary system of N groups of lines consisting of M parallel lines]. *Problemy mashinostroeniya* [Journal of Mechanical Engineering]. Kharkiv, 2014, no. 3, pp. 33 – 37.
7. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Khurdey E. L. Pro vybir nevidomykh znachen' nablyzhuval'noyi funktsiyi v operatori interpolyatsiyi iz zadanymy proektsiyamy [About the selection of unknown data of approximated function in the operator of the interpolation with the set projection]. *Bionika intellekta* [Bionics Intellect]. Kharkiv, 2017, no. 2, pp. 66–71.

Надійшла (received) 07.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Хурдей Євгенія Леонідівна (Хурдей Евгения Леонидовна, Khurdei Evheniia Leonidivna) – асистент, Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків; тел.: (095) 909-44-03; e-mail: evgenia_hurdei@ukr.net.